Функциялардың Н класына тиісті болу қасиеттері

4^0. Айталық t және t_0 сәйкес L қисығының айнымалы және бекітілген нүктелері болсын. t нүктесінің функциясы

$$r^{\lambda}=|t-t_0|^{\lambda}, \quad 0<\lambda\leq 1,$$

L қисығында $H^{\lambda}(L)$ шартын қанағаттандырады.

Шынында да, (8) теңсіздік бойынша

$$\left|r_1^{\lambda}-r_2^{\lambda}\right|\leq|r_2-r_1|^{\lambda}.$$

Дәл осы теңсіздік бекітілген t және айнымалы t_0 үшін де орынды. Демек, $|t-t_0|^{\lambda}$ екі айнымалы t және t_0 арқылы L қисығында H^{λ} шартын қанағаттандырады.

5^0. Егер $\varphi(t)\in H^{\mu}(L)$ және $0\leq\lambda<\mu\leq 1$ болса, онда t айнымалысының функциясы (t_0-бекітілген нүкте)

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|}\in H^{\mu-\lambda}(L).$$

Дәлелдеу үшін $r=|t-t_0|$ енгізіп, φ(t), $\psi(t)$ орындарына $\varphi(r),\psi(r)$ деп те жазатын боламыз. Сонымен бірге $\varphi(t)-\varphi(t_0)=\omega(r)$ деп белгілеп, h>0 деп алып (бұл жалпылықты шектемейді)

$$|\psi(r+h)-\psi(r)|=\left|\frac{\omega(r+h)}{(r+h)^{\lambda}}-\frac{\omega(r)}{r^{\lambda}}\right|=\left|\frac{\omega(r+h)-\omega(r)}{(r+h)^{\lambda}}\right|+\omega(r)\left\{\frac{1}{(r+h)^{\lambda}}-\frac{1}{r^{\lambda}}\right\}\leq$$
$$\leq\frac{|\omega(r+h)-\omega(r)|}{(r+h)^{\lambda}}+|\omega(r)|\frac{(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}}{r^{\lambda}(r+h)^{\lambda}}$$

теңсіздігіне келеміз. Ал

$$|\omega(r+h)-\omega(r)|\leq Ah^{\mu}, \quad |\omega(r)|=|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leq Ar^{\mu}$$

болғандықтан

$$|\psi(r+h)|-\psi(r)\le \Delta_1+\Delta_2,$$

мұндағы $\Delta_1=\dfrac{Ah^{\mu}}{(r+h)^{\lambda}}$, $\Delta_2=Ar^{\mu-\lambda}\dfrac{(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}}{(r+h)^{\lambda}}$.

Мұнан $\Delta_1=A\left[\dfrac{h}{r+h}\right]^{\lambda}h^{\mu-\lambda}\le Ah^{\mu-\lambda}$, яғни Δ_1 қажетті шартты қанағаттандырады екен.

Енді Δ_2-ні мүмкін $r\le h$ және $r>h$ жағдайлар үшін қарастырайық.

$r\le h$ жағдайында (4^0 жағдайды қараңыз)

$$(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}\le h^{\lambda}$$

бағалауын қолданып,

$$\Delta_2\le A\frac{h^{\mu}}{(r+h)^{\lambda}}=A\left[\frac{h}{r+h}\right]^{\lambda}h^{\mu-\lambda}\le Ah^{\mu-\lambda}$$

дәлелдеуіміз керек теңсіздікті аламыз.

Ал $r>h$ жағдайында

$$(r+h)^{\lambda}-r^{\lambda}=r^{\lambda}\left[\left(1+\frac{h}{r}\right)^{\lambda}-1\right]\le \lambda hr^{\lambda-1}$$

бағалауын пайдаланып,

$$\Delta_2\le A\lambda hr^{\mu-\lambda-1}=A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1-\mu+\lambda}h^{\mu-\lambda}<A\lambda h^{\mu-\lambda}$$

дәлелдеуге керек теңсіздікке келеміз. Өйткені,
$0\le\mu\le 1$ және $x\ge 0$ болғанда

$$(1+x)^{\mu}-1\le \mu x,$$

себебі

$$f(x)=(1+x)^{\mu}-\mu x-1$$

десек, $f(0)=0,\ f'(0)\le 0$

екеніне көз жеткіземіз.

Сонымен тұжырым дәлелденді.

6^0. Дәл жоғарыдағы 4^0 жағдайдағыдай

$$\psi(t_0,t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{\left|t-t_0\right|^{\lambda}}$$

функциясы екі айнымалының функциясы ретінде $\mathrm{H}^{\mu-\lambda}(L)$ класына жатады, егер $\varphi(t)\in\mathrm{H}^{\mu}(L)$ және егер $0\le\lambda<\mu$.

5. Моногенділік. Коши-Риман шарттары. Аналитикалылық

$z=x+iy$ кешен айнымалы жазықтығының Д аймағында берілген бірмәнді

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

функциясын қарастырайық. Айталық z және $z+\Delta z$ нүктелерінің екеуі де Д аймағында жатсын. $f(z+\Delta z)-f(z)=\Delta f=\Delta u+i\Delta v$ айырымын z тәуелсіз айнымалысының $\Delta z\neq 0$ өсімшесіне сәйкес $f(z)$ функциясының өсімшесі деп атаймыз.

Егер Δz-тің нөлге кез келген ұмтылуында $\frac{\Delta f}{\Delta z}$ қатынасының ақырлы шегі бар болса, онда бұл шек $f(z)$ функциясының z нүктесіндегі туындысы деп аталады және оны $f'(z)$ арқылы белгілеу қабылданған, яғни

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=f'(z) \tag{16}$$

$z\in Д$ нүктесінде туындысы бар $f(z)$ функциясы осы нүктеде **моногендік** функция деп аталады.

z нүктесінде моногендік $f(z)$ функциясы үшін $\Delta z=\Delta x$ немесе $\Delta z=i\Delta y$ мәндерін қабылдағанда

$$f'(z)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+i\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}\right]=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[\frac{u(x,y+\Delta y)}{i\Delta y} + \frac{v(x,y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y} \right] = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (17)$$

теңдіктеріне келеміз. Бұдан

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (18)$$

теңдіктерін аламыз.

Демек, z нүктесінде моногендік $f(z)$ функциясының нақты және жорымал бөліктерінің осы нүктеде бірінші ретті дербес туындылары бар және олар (18) теңдіктері арқылы байланысқан, яғни (18) теңдіктер $f(z)$ функциясының моногендігінің қажетті шартын анықтайды және (18) теңдіктерді, әдетте, Коши- Риман шарттары деп атайды.

(18) шарттарының орындалуымен бірге $u(x,y)$ және $v(x,y)$ функцияларының толық дифференциалдарының бар болу шарты $f(z)$ функциясының z нүктесінде моногендік болуының жеткілікті шарты болып табылады. Шынында да, толық дифференциалдың бар болуы

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon(x,y,\Delta x,\Delta y), \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \delta(x,y,\Delta x,\Delta y) \end{aligned} \quad (19)$$

теңдіктеріне тең мағыналы, мұндағы ε және δ шамалары $\Delta z \to 0$ ұмтылғанда $|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ арқылы жоғарғы ретті шексіз аз.

Енді

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (20)$$

белгілеулерін енгізіп, (19) теңдіктерді

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\overline{\Delta z} + \varepsilon + i\delta \quad (21)$$

түрінде жазуға болады. (18) теңдіктерді (20) көмегімен

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (22)$$

деп жазуға болады. Сонда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\varepsilon + i\delta}{\Delta z} = 0$ теңдігін ескеріп, (21) теңдіктен

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\partial f}{\partial z}=f'(z) \quad (23)$$

шегінің бар екенін аламыз, ал бұл $f(z)$ функциясының z нүктесінде моногендік екенін дәлелдейді.

Ал (21), (22) көмегімен z нүктесінде моногенді f функциясының Δf өсімшесі

$$\Delta f = f'(z)\Delta z+\varepsilon+i\delta \quad (24)$$

түрінде болады. Мұнын оң жағынын бірінші қосылғышы z нүктесінде моногенді функция **дифференциалы** деп аталады да

$$df = f'(z)\Delta z \quad (25)$$

арқылы белгіленеді және z нүктесінде моногенді f функциясының дифференциалы Δz бойынша сызықтық және $f'(z)\neq 0$ болғанда Δf өсімшесінің бас бөлігі болып табылады. Ал $f(z)=z$ функциясы бүкіл кешен жазықтықта моногенді және

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta z}=1$$

болғандықтан, (25) белгілеуде $dz=1\cdot\Delta z=\Delta z$ деп жазуға болады.Сонда

$$df(z)=f'(z)dz\,. \quad (26)$$

$z\in Д$ нүктесінде моногенді $f(z)$ функциясының дифференциалы үшін (26) жазу $f'(z)$ туындысын дифференциалдар қатынасы $f'(z)=\dfrac{df}{dz}$ түрінде өрнектеуге мүмкіндік береді, ал бұл, егер (22) ескерсек, (20) белгілеулерге толық сәйкес.

Егер $Д$ аймағында берілген бір мәнді $f(z)$ функциясы осы аймақтың әрбір нүктесінде моногенді болса, онда ол **аналитикалық** немесе **голоморфты** деп аталады.

$f(z)$ функциясы z нүктесінде "аналитикалық" деген сөйлемді "$f(z)$ функциясы осы нүктенің белгілі бір маңайында аналитикалық" деген мағынада қолданамыз.

Сонымен, $Д$ аймағында бірмәнді $f(z)$ функциясының аналитикалық болуы үшін осы аймақта Коши-Риман шартының орындалуы қажетті, ал қосымша du және dv дифференциалдарының бар болуы қосымша үйғарымдарының орындалуында жеткілікті.

Г.Луман, Д.Е.Меньшов және П.Монтельдер $f(z)$ функциясының үзіліссіздік жағдайында да бүкіл $Д$ аймағында Коши-Риман шарттарының орындалуы осы аймақта $f(z)$ функциясының аналитикалық болуы үшін қажетті және жеткілікті екенін дәлелдеген.